

A feladatok közül tetszőleges számú kiváltható ehavi KöMaL-feladat megoldásának beadásával is. Lehetőleg minden feladat megoldása kerüljön külön lapra, egyedül az 1.-3., illetve 4.-6. feladatoké lehet egy-egy lapon. Aki e-mailben küldi be a megoldásait, küldje el mindkettőnknek!

1. feladat $f(x)$ egy valós számokon értelmezett függvény, amire igaz, hogy $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ és $f(1) = 2$. Mennyi az értéke az

$$\frac{f(2)}{f(1)} + \frac{f(3)}{f(2)} + \dots + \frac{f(2022)}{f(2021)}$$

kifejezésnek?

2. feladat Egy körön kijelölünk 15 pontot egyenlő távolságokra. Ezen pontok, mint csúcsok háromszögeket határoznak meg. Két háromszöget azonosnak tekintünk, ha egybevágóak, azaz az egyik a másik elforgatásával és/vagy tükrözésével egymásba vihető. Hány különböző háromszög rajzolható?

3. feladat Tekintsünk egy tetraédert. Négy sarkát négy sík vágja le, amelyek mindegyike három egy csúcsból induló él felezőpontján halad át. Az eredeti tetraéder térfogatának mekkora része a kapott test térfogata?

4. feladat Legyenek x, y, z pozitív valós számok úgy, hogy $xyz = 1$. Bizonyítsd be, hogy

$$\frac{x}{x^2 + y} + \frac{y}{y^2 + z} + \frac{z}{z^2 + x} \leq \frac{\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}}{2}.$$

5. feladat Egy sorban n lila és n fehér tehen áll valamilyen sorrendben. Marvin szét szeretné válogatni szín szerint a teheneket úgy, hogy a lila tehenek legyenek a sor elején. Egy lépésben megcserélhet két szomszédos, azonos számú tehénből álló csoportot. Legkevesebb hány lépésre van szüksége Marvinnak, hogy tetszőleges kiinduló állásból el tudja érni a célját?

Például ez három megengedett lépés:

$$FL\overline{FLL}F \rightarrow \overline{F}LLLF \rightarrow \underline{L}\overline{FLL}FF \rightarrow LL\overline{FF}LF$$

6. feladat Egy $2n \times 2n$ -es táblázat mezői párba vannak állítva. Ludmilla úgy mozog a táblázatban, hogy felváltva lép élszomszédos mezőre, illetve teleportál a mező párjára. Az első lépése teleportálás. Igaz-e, hogy bárhogy is vannak a mezők párba állítva, és bárhonnán is indul Ludmilla mindig el tud érni minden mezőt?