

A feladatok közül tetszőleges számú kiváltható ehavi KöMaL-feladat megoldásának beadásával is. Lehetőleg minden feladat megoldása kerüljön külön lapra, egyedül az 1.-3., illetve 4.-6. feladatoké lehet egy-egy lapon. Aki e-mailben küldi be a megoldásait, küldje el mindkettőnknek!

**1. feladat** Egy kocka három csúcsa a  $P(3; 4; 1)$ ,  $Q(5; 2; 9)$  és  $R(1; 6; 5)$ . Melyik pont lehet a kocka közepe?

**2. feladat** Bizonyítsuk be, hogy ha a tér egy egyenese egy háromszög oldalaival egyenlő szögeket alkot, akkor merőleges a háromszög síkjára.

**3. feladat** Hány olyan másodfokú függvény létezik, ami a  $P_{i,j}(i; j)$ ;  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  9 pontból pontosan három halad át?

**4. feladat** Mely  $n \geq 2$  egészekre racionális és melyekre irracionális

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{n^p},$$

ahol  $\mathbb{P}$  a prímszámok halmaza?

**5. feladat** Képzeljük azt, hogy a koordináta-rendszer minden egész rácspontjában egy fa nőtt. Ezek közül kivágtuk azokat, amelyeknek a két koordinátája nem relatív prím. Keletkezett-e így egy (legalább)  $100 \times 100$ -as tisztás?

**6. feladat** Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges  $a_1, a_2, \dots, a_n$  valós számok esetén igaz a következő egyenlőtlenség:

$$\sqrt{a_1^2 + (1 - a_2)^2} + \sqrt{a_2^2 + (1 - a_3)^2} + \dots + \sqrt{a_{n-1}^2 + (1 - a_n)^2} + \sqrt{a_n^2 + (1 - a_1)^2} \geq \frac{n}{\sqrt{2}}$$